ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1980

MATHEMATIQUES II - OPTION M

Deux pages dactylographiées.

Centre à l'étranger

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien orienté dont un repère orthonormé direct est $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le point A est défini par $\overrightarrow{OA} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$. La norme est désignée par le symbole $\| \ \|$. Pour tout couple (U, V) de points distincts de $\mathcal{P}$, la notation $\mathcal{D}_{UV}$ désigne la droite qui contient U et V.

PREMIERE PARTIE

I - 1° Soit E l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels qu'il existe un point L d'abscisse nulle vérifiant les deux relations suivantes :

(i) $M \in \mathcal{D}_{AL}$ (ii) $\| \overrightarrow{LO} \| = \| \overrightarrow{LM} \|$.

Démontrer l'existence d'une forme quadratique Q telle que, si (x,y) sont les coordonnées de M, on ait :

$(M \in E) \Rightarrow (x(x^2 + y^2) = Q(\overrightarrow{OM}))$.

I - 2° On note S la partie de $\mathcal{P}$ définie par :

$(M \in S) \Leftrightarrow (x(x^2 + y^2) = Q(\overrightarrow{OM}))$.

Etudier l'ensemble S\E constitué par les points de $\mathcal{P}$ qui appartiennent à S mais non à E.

I - 3° Déterminer deux fonctions rationnelles à une variable, U et V, telles que

$(M \in S) \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R}, x = U(t), y = V(t) = tU(t))$.

I - 4° Vérifier l'équivalence suivante :

$(M \in S) \Leftrightarrow (\exists (r, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, y = r\sin\varphi, x = r\cos\varphi = 4\sin 2\varphi - 3\cos 2\varphi)$.

I - 5° Montrer que S admet comme asymptote une droite $\mathcal{D}$

(i) en utilisant I - 3°

(ii) en utilisant I - 4°

I - 6° Montrer qu'il existe un cercle C contenant O vérifiant la condition suivante : pour tout $M \in S \setminus \{O\}$, la droite D_{OM} coupe respectivement D et C en des points J et K tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{KJ}$.

DEUXIEME PARTIE

On se place, pour cette partie uniquement, dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$; les coordonnées de M sont notées (ξ, η).

II - 1° Démontrer l'existence d'un réel a et d'une forme linéaire α tels que :

$(M \in S) \Leftrightarrow ((\xi - 2a)(\xi^2 + \eta^2) = \alpha(\overrightarrow{AM}))$.

II - 2° Démontrer l'existence d'une forme linéaire β telle que :

$(M \in S) \Rightarrow ((\xi - a)^2 (\xi^2 + \eta^2) = \beta(\overrightarrow{AM})^2)$.

En déduire une fonction rationnelle à deux variables f, définie sur $\mathbb{R} \times [\mathbb{R} \setminus \{1\}]$ telle que pour tout point M d'abscisse $\xi \neq 0$, il existe $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ avec

$\xi = \rho\cos\theta$, $\eta = \rho\sin\theta$, $\rho = f(\cos\theta, \sin\theta)$.

Exprimer ρ en fonction de $\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$.

II - 3° Examiner le cas des points de S d'abscisse $\xi = 0$.

II - 4° Que peut-on dire des points de $\mathcal{P}$ tels qu'il existe $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\xi = \rho\cos\theta$, $\eta = \rho\sin\theta$, $\rho = f(\cos\theta, \sin\theta)$?

.../...

TROISIEME PARTIE

III - 1° Déterminer la projection orthogonale de S sur la droite de repère $(O,\vec{i})$, la borne supérieure q, la borne inférieure p de l'ensemble des abscisses des points de S. Déterminer les ordonnées des points P et Q de S d'abscisses respectives p et q.

III - 2° Déterminer l'ensemble H des milieux des segments $[M,M']$, avec $(M,M') \in S^2$, et $\overrightarrow{MM'}$ lié à $\vec{j}$ et non nul. Représenter graphiquement H et les quatre points (O, A, P, Q). Quelles propriétés géométriques remarquables possède la figure formée par ces quatre points ?

III - 3° On considère les quatre droites contenant O et respectivement dirigées par les vecteurs $\vec{i}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$. Quelle propriété géométrique remarquable possède la figure formée par ces quatre droites ?

III - 4° Déterminer les intersections de S et de chacune de ces droites.

III - 5° Montrer que l'intersection de S et de l'asymptote $\mathcal{D}$ définie en I - 5° est formée d'un point unique Ω. Déterminer l'intersection de S et de la droite $\mathcal{D}_{A\Omega}$.

III - 6° Calculer $\| \overrightarrow{\Omega P} \|$, $\| \overrightarrow{\Omega Q} \|$. Quelles sont les bissectrices de l'angle des droites $\mathcal{D}_{\Omega P}$ et $\mathcal{D}_{\Omega Q}$?

III - 7° Quelles sont les bissectrices de l'angle des droites $\mathcal{D}_{\Omega O}$ et $\mathcal{D}$?

QUATRIEME PARTIE

IV - 1° Soit M un point de S n'appartenant pas à $\mathcal{D}_{OA}$.
Déterminer l'unique point I de $\mathcal{D}_{O\Omega}$ tel que soit nul le produit scalaire $(\overrightarrow{IM}|\overrightarrow{AM})$.

IV - 2° Montrer que le cercle de centre I tangent à la droite $\mathcal{D}$ passe par M et qu'il est tangent à $\mathcal{D}_{A\Omega}$ et à $\mathcal{D}_{AM}$.

IV - 3° Etudier le cas des points de $S \cap \mathcal{D}_{OA}$.

CINQUIEME PARTIE

V - 1° Représenter avec soin l'ensemble S

V - 2° Celui-ci forme une "boucle" (on ne cherchera pas à définir celle-ci de manière rigoureuse, pas plus que son "intérieur").
Calculer l'aire de la partie de $\mathcal{P}$ "intérieure" à cette "boucle". En donner une valeur décimale approchée à 10^{-5} près.

* *

*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail